วิชาสามัญ คณิตศาสตร์ 1 (ธ.ค. 59)

วันอาทิตย์ที่ 25 ธันวาคม 2559 เวลา 8.30 - 10.00 น.

ตอนที่ 1 แบบปรนัย 5 ตัวเลือก เลือก 1 คำตอบที่ถูกที่สุด จำนวน 10 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน รวม 20 คะแนน

1. กำหนดให้ $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง
ถ้า $x+1$, $x+2$ และ $x+3$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ แล้ว $a+b+c$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 12 2. 24 3. 32 4. 40 5. 46

2. จำนวนเต็มบวก $n > 2$ ที่น้อยที่สุดที่หารด้วย 18 และ 24 แล้วเหลือเศษ 2 มีค่าอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้
1. $[73, 77]$ 2. $[78, 82]$ 3. $[83, 87]$
4. $[88, 92]$ 5. $[93, 97]$

3. กำหนดให้ $A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$ ถ้า $\tan A = 2$ และ $\tan B = 3$ แล้ว $A + B$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{\pi}{4}$ 2. $\frac{\pi}{3}$ 3. $\frac{3\pi}{4}$ 4. $\frac{4\pi}{3}$ 5. $\frac{5\pi}{4}$

4. ถ้า $\vec{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ และ $\vec{b} \times \vec{c} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ แล้ว $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -3 2. -2 3. 2
4. 3 5. $2\sqrt{21}$

5. กำหนดให้จุด $(6, 4)$ อยู่บนวงกลม C ถ้าเส้นผ่านศูนย์กลางสองเส้นของวงกลม C คือส่วนของเส้นตรง $2x + y = 5$ และ $x + 3y = 10$ แล้วรัศมีของวงกลมยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{21}$ หน่วย 2. $\sqrt{24}$ หน่วย 3. 5 หน่วย
4. $\sqrt{26}$ หน่วย 5. 6 หน่วย

6. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $\log |x-2|^{(x-5)} = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4 2. 5 3. 6 4. 8 5. 9

7. ถ้าผลการเรียนคณิตศาสตร์ของ ด.ช. จ้อย เป็นดังตารางต่อไปนี้

	คะแนนที่ได้ (จากคะแนนเต็ม 100)	เกณฑ์การให้น้ำหนักในการคิดคะแนน
การบ้าน	85	20%
สอบกลางภาค	65	40%
สอบปลายภาค	70	40%

แล้วจำนวนเปอร์เซ็นต์ของผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของ ด.ช. จ้อย เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 68 2. 71 3. 74 4. 77 5. 80

8. กำหนดให้ $S = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$ $\mathcal{W} = \{ A \mid A \subset S$ และ A มีสมาชิก 4 ตัว $\}$

ถ้าสุ่มหยิบเซตหนึ่งเซตจาก $\mathcal{W}$ แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้เซตที่ไม่มีเลข 9 เป็นสมาชิก เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{9}$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{4}{9}$ 4. $\frac{1}{2}$ 5. $\frac{5}{9}$

9. ความน่าจะเป็นที่ดวงพรจะไปดูหนังและไปซื้อของในวันอาทิตย์เป็น 0.7 และ 0.6 ตามลำดับ ถ้าดวงพรจะทำกิจกรรมอย่างน้อย 1 อย่างแน่นอน แล้วความน่าจะเป็นที่ดวงพรจะทำกิจกรรมทั้ง 2 อย่างเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.1 2. 0.2 3. 0.3 4. 0.4 5. 0.5

10. ถ้าลำดับ $a_n = \frac{(3+2n)^{13}(5+n)^2}{(1-2n)^{15}}$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $-\frac{1}{4}$ 4. 0 5. $\frac{1}{2}$

ตอนที่ 2 แบบปรนัย 5 ตัวเลือก เลือก 1 คำตอบที่ถูกที่สุด จำนวน 20 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน รวม 80 คะแนน

11. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $z + \left|\frac{\bar{z}-1}{z-1}\right| = -3+2i$ แล้ว $|z|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 2. $\sqrt{10}$ 3. $\sqrt{13}$
4. $2\sqrt{5}$ 5. 4

12. ให้ $A = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ในช่วง $[-10, 10] \}$ $B = \{ x \mid (x+5)(|x|-5) \geq -9 \}$ จำนวนสมาชิกของ $A \cap B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 14 3. 16 4. 18 5. 21

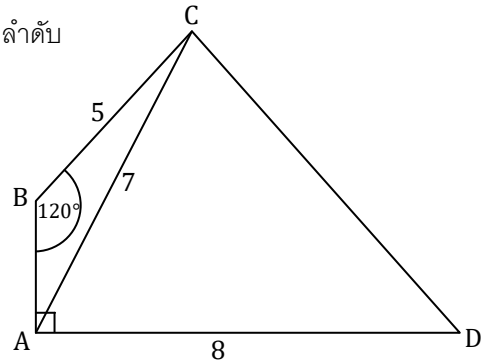
13. กำหนดให้ S เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n โดยที่ n หาร $3{,}399$ แล้วเหลือเศษ 24
จำนวนสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 8 3. 9 4. 10 5. 11

14. ไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(-7, 1)$ และ $(5, 1)$ ถ้าเส้นกำกับเส้นหนึ่งของไฮเพอร์โบลานี้ ขนานกับเส้นตรง $\sqrt{2}x - y + 5 = 0$ แล้วสมการของไฮเพอร์โบลาคือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{(x+1)^2}{24} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$ 2. $\frac{(x+1)^2}{12} - \frac{(y-1)^2}{24} = 1$ 3. $\frac{(x-1)^2}{12} - \frac{(y+1)^2}{24} = 1$
4. $(x+1)^2 - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$ 5. $(x-1)^2 - \frac{(y+1)^2}{2} = 1$

15. กำหนดรูปสี่เหลี่ยม ABCD ดังรูป
โดยมีด้าน BC, AC และ AD ยาวเท่ากับ $5, 7$ และ 8 หน่วยตามลำดับ
มี $\text{B}\hat{\text{A}}\text{D} = 90°$ และ $\text{C}\hat{\text{B}}\text{A} = 120°$
พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ACD เท่ากับข้อใดต่อไปนี้



1. 22 ตารางหน่วย
2. 24 ตารางหน่วย
3. 28 ตารางหน่วย
4. $28\sqrt{2}$ ตารางหน่วย
5. $28\sqrt{3}$ ตารางหน่วย

16. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง ถ้า $\bar{v} = (\sin 80° + \sin 20°)\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$ และ $|\bar{v} \times \vec{i}| = \sin 70° + \sin 10°$ แล้ว $|\bar{v}|^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 3 3. 5 4. 6 5. 7

17. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $(\log 100x)^2 + 2\log_{100} x + 2 = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{11}{1000}$ 2. $\frac{101}{1000}$ 3. $\frac{11}{100}$ 4. 101 5. 110

18. กำหนดระบบสมการ $AX = B$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ b & 0 & -1 \\ c & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

ถ้า $\left[\begin{array}{ccc:c} a & 2 & 1 & 3 \\ b & 0 & -1 & 3 \\ c & 2 & -2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$ แล้ว $\det(A)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -8 2. -4 3. -1 4. 4 5. 8

19. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมีผลต่างร่วม $d > 0$

และ $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_9$ เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่งมีอัตราส่วนร่วม $r > 0$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} = d$

ข. $\det\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} = r$

ค. $\det\begin{bmatrix} 2^{a_1} & 2^{a_2} & 2^{a_3} \\ 2^{a_4} & 2^{a_5} & 2^{a_6} \\ 2^{a_7} & 2^{a_8} & 2^{a_9} \end{bmatrix} = 2^d$

ง. $\det\begin{bmatrix} b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_4^2 & b_5^2 & b_6^2 \\ b_7^2 & b_8^2 & b_9^2 \end{bmatrix} = r^2$

จำนวนข้อความที่ถูกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก)
2. 1
3. 2
4. 3
5. 4

20. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $B = \{3, 4, 5, 6\}$

จำนวนสับเซต C ของ A ซึ่ง $C \cap B$ มีสมาชิก 2 ตัว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 32
2. 48
3. 64
4. 80
5. 96

21. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 60 และ 10 คะแนน ตามลำดับ ถ้านักเรียนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 70 คะแนน มี 84.13% แล้วนักเรียนที่สอบได้ 50 คะแนน จะมีตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 15.87
2. 24.13
3. 34.13
4. 47.61
5. 50

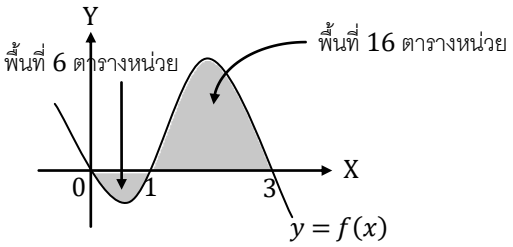
22. ตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 40 คน เป็นดังนี้

ช่วงคะแนน	ความถี่
1 – 5	4
6 – 10	a
11 – 15	6
16 – 20	b
21 – 25	10
26 – 30	4

ถ้าข้อมูลชุดนี้มีมัธยฐานเท่ากับ 17.5 คะแนน แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบจะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16.50 คะแนน
2. 16.75 คะแนน
3. 17.25 คะแนน
4. 17.50 คะแนน
5. 17.75 คะแนน

23. ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีกราฟดังรูป



แล้ว $\int_0^3 \big(|f(x)| - f(x)\big)\,dx$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6
2. 10
3. 12
4. 16
5. 32

24. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม และกราฟของ $y = f(x)$ ตัดกับกราฟของ $y = 3x - 4$ ที่ $x = 2$ และ $x = 5$

แล้ว $\int_2^5 \big(2xf(x) + (x^2 - 1)f'(x)\big)\,dx$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 94
2. 104
3. 158
4. 258
5. 264

25. กำหนดให้ a_n เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี $a_1 = 2$ และผลต่างร่วมเท่ากับ $-\frac{2}{9}$
ถ้า $b_n = 2^{a_n}$ แล้วจำนวนเต็มบวก m ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_m \geq 1024$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 8 3. 9 4. 10 5. 11

26. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ถ้า $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{211}{9}$
และ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 27$ แล้วจำนวนจริง x ซึ่งทำให้ $\sum_{i=1}^{11} |a_i - x|$ มีค่าน้อยที่สุด เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{64}{81}$ 2. 1 3. $\frac{16}{9}$ 4. $\frac{32}{27}$ 5. $\frac{64}{27}$

27. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรีสาม ซึ่งมีค่าวิกฤตที่ $x = 4$ และ $x = -4$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $f''(-4) \cdot f''(4) < 0$

ข. $f(4\sqrt{3}) = 2f(0)$

ค. $f(-4) + f(4) = 2f(0)$

ง. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$ เท่ากับ $f(0)$

จำนวนข้อความที่ถูกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก) 2. 1 3. 2
4. 3 5. 4

28. ถ้า S เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก m ที่ทำให้ $\frac{2^{100}}{2^{100}-m}$ เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วผลบวกของสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $99(2^{99})$
2. $100(2^{99})+1$
3. $99(2^{100})+1$
4. $100(2^{100})$
5. $101(2^{101})$

29. กำหนดให้ $A=\{1,2,3,\ldots,99,100\}$ และ $B=\{k\in A \mid \left(\frac{\cos\frac{5\pi}{8}-i\sin\frac{5\pi}{8}}{\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}}\right)^{k}=i\}$ โดยที่ $i^2=-1$ จำนวนสมาชิกของ B เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5
2. 7
3. 9
4. 11
5. 13

30. กำหนดให้ $S=\{-2,-1,0,1,2\}$ $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ $W=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \mid a,b,c,d\in S\right\}$ ถ้าสุ่มเมทริกซ์จากเซต W มา 1 เมทริกซ์ แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์ B ซึ่ง $AB=BA$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{17}{625}$
2. $\frac{19}{625}$
3. $\frac{21}{625}$
4. $\frac{23}{625}$
5. $\frac{25}{625}$

เฉลย

1. 5	7. 2	13. 5	19. 1	25. 3
2. 1	8. 5	14. 2	20. 5	26. 4
3. 3	9. 3	15. 1	21. 1	27. 4
4. 1	10. 3	16. 2	22. 1	28. 3
5. 4	11. 4	17. 1	23. 3	29. 2
6. 5	12. 2	18. 5	24. 4	30. 2

แนวคิด

1. กำหนดให้ $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง

ถ้า $x+1$, $x+2$ และ $x+3$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ แล้ว $a+b+c$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 12 2. 24 3. 32 4. 40 5. 46

ตอบ 5

$P(x)$ เป็นพหุนามกำลังสาม ที่มี $x+1$, $x+2$ และ $x+3$ เป็นตัวประกอบ

ดังนั้น $P(x)$ ต้องอยู่ในรูป $k(x+1)(x+2)(x+3)$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

และจากพจน์กำลังสามของ $P(x)$ คือ $2x^3$ ดังนั้น $k=2 \rightarrow P(x) = 2(x+1)(x+2)(x+3)$

จะกระจาย $P(x)$ แล้วเทียบสัมประสิทธิ์ก็ได้ แต่สังเกตว่าถ้าแทน $x=1$ ก็จะได้ $a+b+c$ ได้เหมือนกัน

$$\begin{aligned} P(x) = \; 2x^3 \; + \; ax^2 \; + \; bx \; + \; c \; &= 2(x+1)(x+2)(x+3) \\ 2(1^3) + a(1^2) + b(1) + c \; &= 2(1+1)(1+2)(1+3) \\ 2 \; + \; a \; + \; b \; + \; c \; &= 48 \\ a \; + \; b \; + \; c \; &= 46 \end{aligned}$$

แทน $x=1$

2. จำนวนเต็มบวก $n > 2$ ที่น้อยที่สุดที่หารด้วย 18 และ 24 แล้วเหลือเศษ 2 มีค่าอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $[73, 77]$ 2. $[78, 82]$ 3. $[83, 87]$

4. $[88, 92]$ 5. $[93, 97]$

ตอบ 1

ต้องหาจำนวนที่น้อยที่สุด ที่หารด้วย 18 และ 24 ลงตัว แล้วเอามาบวก 2 ก็จะทำให้หารแล้วเหลือเศษ 2

จำนวนที่น้อยที่สุด ที่หารด้วย 18 และ 24 ลงตัว = ค.ร.น. ของ 18 และ 24

$6 \,)\, \underline{18 \quad 24}$ $\rightarrow$ จะได้ ค.ร.น. $= 6 \times 3 \times 4 = 72$

$3 \quad 4$ $\rightarrow$ จะได้ $n = 72 + 2 = 74$ อยู่ในช่วงของ ข้อ 1. $[73, 77]$

3. กำหนดให้ $A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$ ถ้า $\tan A = 2$ และ $\tan B = 3$ แล้ว $A+B$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\pi}{4}$ 2. $\frac{\pi}{3}$ 3. $\frac{3\pi}{4}$ 4. $\frac{4\pi}{3}$ 5. $\frac{5\pi}{4}$

ตอบ 3

มี $\tan A = 2$ และ $\tan B = 3 \rightarrow$ สามารถหา $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{2+3}{1-(2)(3)} = \frac{5}{-5} = -1$

และจาก $0 < A < \frac{\pi}{2}$

$0 < B < \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $0 < A + B < \pi$ จาก $\tan(A+B) = -1$ จะได้ $A + B = \frac{3\pi}{4}$

4. ถ้า $\vec{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ และ $\vec{b} \times \vec{c} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ แล้ว $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -3 2. -2 3. 2
4. 3 5. $2\sqrt{21}$

<u>ตอบ</u> 1

$$(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$
$$= (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{c}$$ ⟩ กระจาย $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot$ ในการบวกเวกเตอร์

หมุน $\times$ และ $\cdot$ ค่าไม่เปลี่ยน

$$= (\vec{a} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} + (\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$$
$$= \quad \bar{0} \quad \cdot \vec{c} + (\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} + \quad \bar{0} \quad \cdot \vec{a}$$ ⟩ $\vec{u} \times \vec{u} = \bar{0}$
$$= \qquad\qquad (\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$$ ⟩ $\bar{0} \cdot \vec{u} = 0$
$$= \qquad\qquad -(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$$ ⟩ $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
$$= \qquad -(3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}) \cdot (2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k})$$
$$= \quad -((3)(2) + (2)(-1) + (-1)(1)) \quad = -3$$

5. กำหนดให้จุด $(6, 4)$ อยู่บนวงกลม C ถ้าเส้นผ่านศูนย์กลางสองเส้นของวงกลม C คือส่วนของเส้นตรง $2x + y = 5$ และ $x + 3y = 10$ แล้วรัศมีของวงกลมยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{21}$ หน่วย 2. $\sqrt{24}$ หน่วย 3. 5 หน่วย
4. $\sqrt{26}$ หน่วย 5. 6 หน่วย

<u>ตอบ</u> 4

เส้นผ่านศูนย์กลางวงกลม จะตัดกันที่จุดศูนย์กลางวงกลมเสมอ → หาจุดตัดเส้นตรง

$$2x + y = 5 \quad ...(1)$$
$$x + 3y = 10 \quad ...(2)$$
$$(1) \times 3: \quad 6x + 3y = 15 \quad ...(3)$$
$$(3) - (2): \quad 5x = 5$$
$$x = 1$$
$$(1): \quad 2(1) + y = 5$$
$$y = 3$$

จะได้จุดศูนย์กลางวงกลม = จุดตัดเส้นตรง $= (1, 3)$

ดังนั้น รัศมี = ระยะจากจุดศูนย์กลาง ไปจุดไหนก็ได้บนวงกลม

= ระยะจาก $(1, 3)$ ไป $(6, 4)$

$= \sqrt{(6-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{26}$

ระยะระหว่าง (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

6. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $\log |x-2|^{(x-5)} = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4 2. 5 3. 6 4. 8 5. 9

<u>ตอบ</u> 5

$$\log |x-2|^{(x-5)} = 0$$
$$|x-2|^{(x-5)} = 10^0$$ ⟩ log แบบไม่มีฐาน คือ log ฐาน 10
$$|x-2|^{(x-5)} = 1$$

ผลยกกำลัง เป็น 1 ได้ 3 กรณี คือ ฐาน $= 1$, เลขชี้กำลัง $= 0$ (เมื่อ ฐาน $\neq 0$) , $(-1)^c$ เมื่อ c เป็นเลขคู่

ฐาน $= 1$	เลขชี้กำลัง $= 0$ (เมื่อ ฐาน $\neq 0$)	$(-1)^c$ เมื่อ c เป็นเลขคู่
$\|x-2\| = 1$	$x - 5 = 0$	$\|x-2\| = -1$
$x - 2 = 1, -1$	$x = 5$	ค่าสัมบูรณ์เป็นลบไม่ได้
$x = 3, 1$	($x = 5$ จะได้ฐาน $\|x-2\| \neq 0$)	ไม่มีคำตอบ

จะได้ผลบวกคำตอบ $= 3 + 1 + 5 = 9$

7. ถ้าผลการเรียนคณิตศาสตร์ของ ด.ช. จ้อย เป็นดังตารางต่อไปนี้

	คะแนนที่ได้ (จากคะแนนเต็ม 100)	เกณฑ์การให้น้ำหนักในการคิดคะแนน
การบ้าน	85	20%
สอบกลางภาค	65	40%
สอบปลายภาค	70	40%

แล้วจำนวนเปอร์เซ็นต์ของผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของ ด.ช. จ้อย เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 68 2. 71 3. 74 4. 77 5. 80

ตอบ 2

จากสูตรค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก จะได้ $= \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} = \frac{(20)(85) + (40)(65) + (40)(70)}{20 + 40 + 40}$

$= \frac{1700 + 2600 + 2800}{100} = \frac{7100}{100} = 71$

8. กำหนดให้ $S = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$ $\mathcal{W} = \{ A \mid A \subset S$ และ A มีสมาชิก 4 ตัว $\}$

ถ้าสุ่มหยิบเซตหนึ่งเซตจาก $\mathcal{W}$ แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้เซตที่ไม่มีเลข 9 เป็นสมาชิก เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{9}$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{4}{9}$ 4. $\frac{1}{2}$ 5. $\frac{5}{9}$

ตอบ 5

$n(S)$ = จำนวนแบบทั้งหมด = จำนวนสับเซตของ S ที่มีสมาชิก 4 ตัว

→ เลือก 4 ตัว จากสมาชิกของ S (ซึ่งมี 9 ตัว) จะเลือกได้ $\binom{9}{4}$ แบบ

$n(E)$ = จำนวนแบบที่โจทย์สนใจ = จำนวนสับเซตของ S ที่มีสมาชิก 4 ตัว ที่ไม่มีเลข 9 เป็นสมาชิก

→ เหลือให้เลือกแค่ $1, 2, 3, \dots, 8$ (ทั้งหมด 8 ตัว) เลือกมา 4 ตัว จะเลือกได้ $\binom{8}{4}$ แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\binom{8}{4}}{\binom{9}{4}} = \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{5}{9}$

9. ความน่าจะเป็นที่ดวงพรจะไปดูหนังและไปซื้อของในวันอาทิตย์เป็น 0.7 และ 0.6 ตามลำดับ ถ้าดวงพรจะทำกิจกรรมอย่างน้อย 1 อย่างแน่นอน แล้วความน่าจะเป็นที่ดวงพรจะทำกิจกรรมทั้ง 2 อย่างเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.1 2. 0.2 3. 0.3 4. 0.4 5. 0.5

ตอบ 3

จากโจทย์ จะได้ $P(\text{ดูหนัง}) = 0.7$ และ $P\left(\text{ซื้อของ}\right) = 0.6$

ทำอย่างน้อย 1 อย่างแน่นอน แสดงว่า $P\left(\text{ดูหนัง หรือ ซื้อของ}\right) = 1$

ใช้สูตร Inclusive – Exclusive : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

จะได้ $P\left(\text{ดูหนัง หรือ ซื้อของ}\right) = P(\text{ดูหนัง}) + P\left(\text{ซื้อของ}\right) - P\left(\text{ดูหนัง และ ซื้อของ}\right)$

$1 = 0.7 + 0.6 - P\left(\text{ดูหนัง และ ซื้อของ}\right)$

ดังนั้น $P\left(\text{ดูหนัง และ ซื้อของ}\right) = 0.3$

10. ถ้าลำดับ $a_n = \frac{(3+2n)^{13}(5+n)^2}{(1-2n)^{15}}$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $-\frac{1}{4}$ 4. 0 5. $\frac{1}{2}$

<u>ตอบ</u> 3

จัดรูป a_n โดยดึง n จากทั้งเศษและส่วนออกมาตัดกัน

$$\frac{(3+2n)^{13}(5+n)^2}{(1-2n)^{15}} = \frac{\left(n\left(\frac{3}{n}+2\right)\right)^{13}\left(n\left(\frac{5}{n}+1\right)\right)^2}{\left(n\left(\frac{1}{n}-2\right)\right)^{15}}$$

$$= \frac{n^{13}\left(\frac{3}{n}+2\right)^{13}\ n^2\left(\frac{5}{n}+1\right)^2}{n^{15}\left(\frac{1}{n}-2\right)^{15}}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{n}+2\right)^{13}\ \left(\frac{5}{n}+1\right)^2}{\left(\frac{1}{n}-2\right)^{15}} \quad \rightarrow \text{ ดังนั้น } \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{(0+2)^{13}(0+1)^2}{(0-2)^{15}} = \frac{2^{13}}{-2^{15}} = -\frac{1}{4}$$

11. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $z + \left|\frac{\bar{z}-1}{z-1}\right| = -3+2i$ แล้ว $|z|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 2. $\sqrt{10}$ 3. $\sqrt{13}$
4. $2\sqrt{5}$ 5. 4

<u>ตอบ</u> 4

$z + \left|\frac{\bar{z}-1}{z-1}\right| = -3+2i$

$\Big\downarrow$ สังยุคของจำนวนจริง จะได้เท่าเดิม $\rightarrow \bar{1} = 1$

$z + \left|\frac{\bar{z}-\bar{1}}{z-1}\right| = -3+2i$

$\Big\downarrow$ ดึงสังยุคออกนอกการลบ

$z + \left|\frac{\overline{z-1}}{z-1}\right| = -3+2i$

$\Big\downarrow$ กระจายค่าสัมบูรณ์ในการคูณ

$z + \frac{|\overline{z-1}|}{|z-1|} = -3+2i$

$\Big\downarrow$ จากสมมบัติของค่าสัมบูรณ์ จะได้ $|\overline{z-1}| = |z-1|$

$z + 1 = -3+2i$

$z = -4+2i$

จะได้ $|z| = \sqrt{(-4)^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

12. ให้ $A = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ในช่วง $[-10, 10] \}$ $\quad B = \{ x \mid (x+5)(|x|-5) \geq -9 \}$

จำนวนสมาชิกของ $A \cap B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

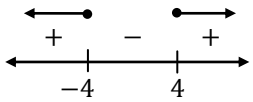
1. 7 2. 14 3. 16 4. 18 5. 21

ตอบ 2

แก้หา $B \rightarrow$ จะแบ่งกรณีให้รู้เครื่องหมายของ x เพื่อใช้สมบติ $|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$ ในการถอดค่าสัมบูรณ์

กรณี $x \geq 0$:

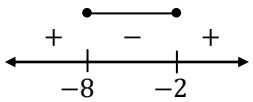
$$\begin{aligned} (x+5)(|x|-5) &\geq -9 \\ (x+5)(\ x\ -5) &\geq -9 \\ x^2 - 25 &\geq -9 \\ x^2 - 16 &\geq 0 \\ (x+4)(x-4) &\geq 0 \end{aligned}$$



กรณีนี้คือ $x \geq 0 \rightarrow$ จะเหลือคำตอบคือ $[4, \infty)$

กรณี $x < 0$:

$$\begin{aligned} (x+5)(|x|-5) &\geq -9 \\ (x+5)(-x-5) &\geq -9 \\ -x^2 - 5x - 5x - 25 &\geq -9 \\ 0 &\geq x^2 + 10x + 16 \\ 0 &\geq (x+8)(x+2) \end{aligned}$$



กรณีนี้คือ $x < 0 \rightarrow$ จะได้คำตอบคือ $[-8, -2]$

รวมสองกรณี จะได้ $B = [-8, -2] \cup [4, \infty)$

$A \cap B =$ เอา B เฉพาะที่อยู่ในช่วง $[-10, 10] \rightarrow [-8, -2]$ จะมี 7 ตัว
$\rightarrow [4, 10]$ จะมี 7 ตัว
} รวม 14 ตัว

13. กำหนดให้ S เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n โดยที่ n หาร 3,399 แล้วเหลือเศษ 24

จำนวนสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 8 3. 9 4. 10 5. 11

ตอบ 5

แสดงว่า ถ้าเอา 3399 มาหักเศษ 24 ออก ผลที่เหลือจะต้องหารด้วย n ลงตัว

นั่นคือ n ต้องหาร $3399 - 24 = 3375$ ลงตัว

เนื่องจาก 3375 แยกตัวประกอบได้เป็น $3^3 \cdot 5^3$ ดังนั้น n ต้องอยู่ในรูป $3^a \cdot 5^b$ เมื่อ $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$

จะเห็นว่าเลือก a และ b ได้ตัวละ 4 แบบ (คือ 0 ถึง 3) ดังนั้น จะมี $3^a \cdot 5^b$ ได้ทั้งหมด $4 \times 4 = 16$ แบบ

นอกจากนี้ จะเห็นว่า n ต้องมากกว่า 24 ด้วย (ไม่งั้น n จะหารแล้วเหลือเศษ 24 ไม่ได้)

ดังนั้น ต้องหัก $3^a \cdot 5^b$ ที่ ≤ 24 ออกด้วย ซึ่งจะมี $3^0 \cdot 5^0 = 1$, $3^1 \cdot 5^0 = 3$, $3^2 \cdot 5^0 = 9$

$3^0 \cdot 5^1 = 5$, $3^1 \cdot 5^1 = 15$

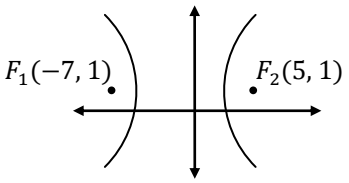
ทั้งหมด 5 แบบ $\rightarrow$ เหลือจำนวนแบบ $= 16 - 5 = 11$ แบบ

14. ไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(-7,1)$ และ $(5,1)$ ถ้าเส้นกำกับเส้นหนึ่งของไฮเพอร์โบลานี้ ขนานกับเส้นตรง $\sqrt{2}x-y+5=0$ แล้วสมการของไฮเพอร์โบลาคือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{(x+1)^2}{24}-\frac{(y-1)^2}{12}=1$
2. $\frac{(x+1)^2}{12}-\frac{(y-1)^2}{24}=1$
3. $\frac{(x-1)^2}{12}-\frac{(y+1)^2}{24}=1$
4. $(x+1)^2-\frac{(y-1)^2}{2}=1$
5. $(x-1)^2-\frac{(y+1)^2}{2}=1$

ตอบ 2

จุดโฟกัสเรียงตัวในแนวนอน → เป็นไฮเพอร์โบลาแนวนอน ดังรูป



จะได้รูปสมการคือ $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

จะได้ระยะโฟกัส $c=\frac{5-(-7)}{2}=6$ แทนในสูตร $c^2=a^2+b^2$

$$6^2=a^2+b^2 \quad ...(1)$$

โจทย์ให้เส้นกำกับเส้นหนึ่งของไฮเพอร์โบลา $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ขนานกับเส้นตรง $\sqrt{2}x-y+5=0$

$$\sqrt{2}x+5=y$$

ความชัน $=\sqrt{2}$

จะได้เส้นกำกับคือ $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=0$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}=\frac{(y-k)^2}{b^2}$$

$$\frac{b^2}{a^2}(x-h)^2=(y-k)^2$$

$$\pm\frac{b}{a}(x-h)=y-k$$

ความชัน $=\frac{b}{a},-\frac{b}{a}$ → ขนานกัน ความชันจะเท่ากัน → $\frac{b}{a}=\sqrt{2}$

$$\frac{b^2}{a^2}=2$$

$$b^2=2a^2 \quad ...(2)$$

แทน (2) ใน (1) จะได้ $6^2=a^2+2a^2$

$$36=3a^2$$

$$12=a^2 \quad \rightarrow \text{แทนใน (2) จะได้ } b^2=2(12)=24$$

และ จุดศูนย์กลางต้องอยู่ตรงกลางระหว่างจุดโฟกัสทั้งสอง จะได้จุดศูนย์กลาง $(h,k)=(\frac{-7+5}{2},\frac{1+1}{2})=(-1,1)$

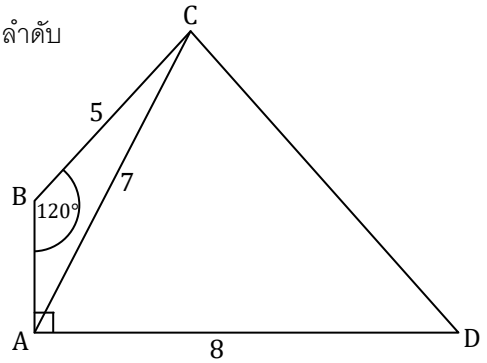
แทน a^2, b^2, h, k ใน $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ จะได้สมการไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{(x+1)^2}{12}-\frac{(y-1)^2}{24}=1$

15. กำหนดรูปสี่เหลี่ยม ABCD ดังรูป

โดยมีด้าน BC, AC และ AD ยาวเท่ากับ 5, 7 และ 8 หน่วยตามลำดับ

มี $B\hat{A}D=90°$ และ $C\hat{B}A=120°$

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ACD เท่ากับข้อใดต่อไปนี้



1. 22 ตารางหน่วย
2. 24 ตารางหน่วย
3. 28 ตารางหน่วย
4. $28\sqrt{2}$ ตารางหน่วย
5. $28\sqrt{3}$ ตารางหน่วย

ตอบ 1

ใช้กฎของ cos กับ ΔABC เพื่อหา BA → ถ้าให้ $BA=x$ จะได้ $7^2=x^2+5^2-2(x)(5)\cos 120°$

$$49=x^2+25-10x \quad \left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$0 = x^2 + 5x - 24$$
$$0 = (x-3)(x+8)$$
$$x = 3, \cancel{-8}$$ (ความยาว เป็นลบไม่ได้)

ลากเส้นประเพิ่มดังรูป จะได้ $EF = BA = 3$

และจะได้ $C\hat{B}E$ เหลือ $120° - 90° = 30°$

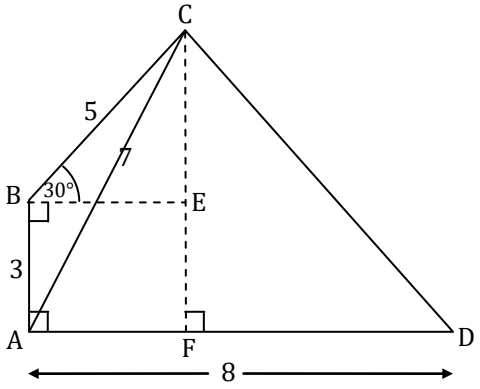
ใน ΔCBE จะได้ $\sin 30° = \frac{CE}{BC}$

$$\frac{1}{2} = \frac{CE}{5}$$
$$2.5 = CE$$

จะได้ $CF = CE + EF = 2.5 + 3 = 5.5$

ดังนั้น พื้นที่ $\Delta ACD = \frac{1}{2} \times AD \times CF$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 5.5 = 22$$



16. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง ถ้า $\bar{v} = (\sin 80° + \sin 20°)\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$ และ $|\bar{v} \times \vec{i}| = \sin 70° + \sin 10°$ แล้ว $|\bar{v}|^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 3 3. 5 4. 6 5. 7

<u>ตอบ</u> 2

ใช้สูตร $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ จัดรูปผลบวกของ sin ในโจทย์ก่อน ดังนี้

$$\sin 80° + \sin 20° = 2\sin\frac{80°+20°}{2}\cos\frac{80°-20°}{2}$$
$$= 2\sin 50° \cos 30°$$
$$= 2\sin 50° \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \sqrt{3}\sin 50°$$

$$\sin 70° + \sin 10° = 2\sin\frac{70°+10°}{2}\cos\frac{70°-10°}{2}$$
$$= 2\sin 40° \cos 30°$$
$$= 2\sin 40° \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \sqrt{3}\sin 40°$$

ดังนั้น $\bar{v} = (\sqrt{3}\sin 50°)\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$ และ $|\bar{v} \times \vec{i}| = \sqrt{3}\sin 40°$

$$|\bar{v}||\vec{i}|\sin\theta = \sqrt{3}\sin 40°$$
$$|\bar{v}|\sin\theta = \sqrt{3}\sin 40°$$
$$|\bar{v}|^2\sin^2\theta = 3\sin^2 40° \quad ...(1)$$

$$|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta$$
$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$$

จะเห็นว่า ถ้ามี $|\bar{v}|^2\cos^2\theta$ อีกตัวมาบวก จะดึง $|\bar{v}|^2$ แล้วใช้สูตร $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ เพื่อหาสิ่งที่โจทย์ถามได้

ซึ่งเราหา $|\bar{v}|^2\cos^2\theta$ ได้จากการดอท $\rightarrow$ $\bar{v} \cdot \vec{i} = |\bar{v}||\vec{i}|\cos\theta = |\bar{v}|\cos\theta$

$$\begin{bmatrix}\sqrt{3}\sin 50° \\ a \\ b\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix} = |\bar{v}|\cos\theta$$
$$\sqrt{3}\sin 50° = |\bar{v}|\cos\theta$$
$$3\sin^2 50° = |\bar{v}|^2\cos^2\theta \quad ...(2)$$

เอา (1) + (2) จะได้ $|\bar{v}|^2\sin^2\theta + |\bar{v}|^2\cos^2\theta = 3\sin^2 40° + 3\sin^2 50°$ ⟩ โคฟังก์ชัน

$$|\bar{v}|^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 3(\sin^2 40° + \cos^2 40°)$$ ⟩ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$|\bar{v}|^2 = 3$$

17. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $(\log 100x)^2 + 2\log_{100} x + 2 = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{11}{1000}$ 2. $\frac{101}{1000}$ 3. $\frac{11}{100}$ 4. 101 5. 110

<u>ตอบ</u> 1

$$\begin{aligned}
(\log 100x)^2 + 2\log_{100} x + 2 &= 0 \quad \text{ใช้ } \log MN = \log M + \log N \\
(\log 100 + \log x)^2 + 2\log_{100} x + 2 &= 0 \\
(\log 10^2 + \log x)^2 + 2\log_{10^2} x + 2 &= 0 \quad \text{ใช้ } \log_{a^b} M^N = \frac{N}{b}\log_a M \\
(2\log 10 + \log x)^2 + \tfrac{2}{2}\log_{10} x + 2 &= 0 \quad \text{ใช้ } \log \text{ ไม่มีฐาน คือ ฐาน } = 10 \\
(2 + \log x)^2 + \log x + 2 &= 0 \quad \text{เปลี่ยนตัวแปร ให้ } 2 + \log x = A \\
A^2 + A &= 0 \\
A(A+1) &= 0 \\
A &= 0, -1 \\
2 + \log x &= 0, -1 \\
\log x &= -2, -3 \\
x &= 10^{-2}, 10^{-3}
\end{aligned}$$

จะได้ผลบวกคำตอบ $= 10^{-2} + 10^{-3} = \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} = \frac{10+1}{1000} = \frac{11}{1000}$

18. กำหนดระบบสมการ $AX = B$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ b & 0 & -1 \\ c & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

ถ้า $\left[\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 3 \\ b & 0 & -1 & 3 \\ c & 2 & -2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$ แล้ว $\det(A)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -8 2. -4 3. -1 4. 4 5. 8

<u>ตอบ</u> 5

แปลง $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$ กลับเป็นระบบสมการ จะได้

$$\begin{aligned}
x + 2y + z &= 3 \quad \ldots(1) \\
y &= -3 \quad \ldots(2) \\
z &= 5 \quad \ldots(3)
\end{aligned}$$

แทน (2), (3) ใน (1) : $x + 2(-3) + 5 = 3$

$x = 4$

จะเอา x, y, z ไปแทนใน แล้วหา a, b, c ก็ได้ แต่ใช้กฎของเครเมอร์กับค่า x จะหา $\det(A)$ ได้โดยตรง

จาก $\left[\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 3 \\ b & 0 & -1 & 3 \\ c & 2 & -2 & -4 \end{array}\right]$ ใช้กฎของเครเมอร์ จะได้ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & 0 & -1 \\ c & 2 & -2 \end{vmatrix}}$

$$\begin{aligned}
4 &= \frac{0+8+6-0+6+12}{\det(A)} \\
\det(A) &= \frac{32}{4} = 8
\end{aligned}$$

19. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมีผลต่างร่วม $d > 0$

และ $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_9$ เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่งมีอัตราส่วนร่วม $r > 0$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} = d$

ข. $\det\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} = r$

ค. $\det\begin{bmatrix} 2^{a_1} & 2^{a_2} & 2^{a_3} \\ 2^{a_4} & 2^{a_5} & 2^{a_6} \\ 2^{a_7} & 2^{a_8} & 2^{a_9} \end{bmatrix} = 2^d$

ง. $\det\begin{bmatrix} b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_4^2 & b_5^2 & b_6^2 \\ b_7^2 & b_8^2 & b_9^2 \end{bmatrix} = r^2$

จำนวนข้อความที่ถูกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก)
2. 1
3. 2
4. 3
5. 4

<u>ตอบ</u> 1

ก. ลำดับเลขคณิต พจน์ที่ติดกัน จะห่างกัน $= d$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} \overset{C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & d \\ a_4 & a_5 & d \\ a_7 & a_8 & d \end{vmatrix} \overset{C_2 - C_1}{=} \begin{vmatrix} a_1 & d & d \\ a_4 & d & d \\ a_7 & d & d \end{vmatrix} = 0$$

สองหลักเหมือนกัน $\rightarrow \det = 0$

$\rightarrow$ ก. ผิด

ข. ลำดับเรขาคณิต พจน์ที่ติดกัน จะคูณเพิ่มทีละ r

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_1 r & b_1 r^2 \\ b_4 & b_4 r & b_4 r^2 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{vmatrix} = b_1 b_4 \begin{vmatrix} 1 & r & r^2 \\ 1 & r & r^2 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{vmatrix} = 0$$

สองแถวเหมือนกัน $\rightarrow \det = 0$

ดึง b_1 ออกจากแถว 1 , ดึง b_4 ออกจากแถว 2

$\rightarrow$ ข. ผิด

ค. $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, 2^{a_4}, \ldots$ คือ $2^{a_1}, 2^{a_1+d}, 2^{a_1+2d}, 2^{a_1+3d}, \ldots$

คือ $2^{a_1}, 2^{a_1} \cdot 2^d, 2^{a_1} \cdot 2^{2d}, 2^{a_1} \cdot 2^{3d}, \ldots$

$\rightarrow$ เป็นลำดับเรขาคณิต (คูณเพิ่มทีละ 2^d)

ซึ่งจากข้อ ข. ถ้าเอาลำดับเรขาคณิตมาใส่เมทริกซ์ จะได้ $\det = 0$ ดังนั้น $\begin{vmatrix} 2^{a_1} & 2^{a_2} & 2^{a_3} \\ 2^{a_4} & 2^{a_5} & 2^{a_6} \\ 2^{a_7} & 2^{a_8} & 2^{a_9} \end{vmatrix} = 0$ $\rightarrow$ ค. ผิด

ง. $b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2, \ldots$ คือ $b_1^2, (b_1 r)^2, (b_1 r^2)^2, (b_1 r^3)^2, \ldots$

คือ $b_1^2, b_1^2 r^2, b_1^2 r^4, b_1^2 r^6, \ldots$

$\rightarrow$ เป็นลำดับเรขาคณิต (คูณเพิ่มทีละ r^2)

ซึ่งจากข้อ ข. ถ้าเอาลำดับเรขาคณิตมาใส่เมทริกซ์ จะได้ $\det = 0$ ดังนั้น $\begin{vmatrix} b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_4^2 & b_5^2 & b_6^2 \\ b_7^2 & b_8^2 & b_9^2 \end{vmatrix} = 0$ $\rightarrow$ ง. ผิด

20. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $B = \{3, 4, 5, 6\}$

จำนวนสับเซต C ของ A ซึ่ง $C \cap B$ มีสมาชิก 2 ตัว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 32 2. 48 3. 64 4. 80 5. 96

ตอบ 5

$C \cap B$ มีสมาชิก 2 ตัว $\rightarrow$ แสดงว่า ต้องเลือก 2 ตัวจาก 4 ตัวใน $B = \{3, 4, 5, 6\}$ มาไว้ใน C

$\rightarrow$ เลือกได้ $\binom{4}{2}$ แบบ

และเนื่องจาก $C \subset A$ ดังนั้น สมาชิกส่วนที่เหลือของ C ต้องมาจาก A เท่านั้น

ที่เหลือใน A คือ $1, 2, 7, 8$ มี 4 ตัว $\rightarrow$ แต่ละตัวเลือก เอา หรือ ไม่เอา ให้ C ได้ตัวละ 2 แบบ

$\rightarrow$ เลือกได้ 2^4 แบบ

ดังนั้น จำนวนแบบของ C คือ $\binom{4}{2} \times 2^4 = \frac{4 \cdot 3}{2} \times 16 = 96$

21. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 60 และ 10 คะแนน ตามลำดับ ถ้านักเรียนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 70 คะแนน มี 84.13% แล้วนักเรียนที่สอบได้ 50 คะแนน จะมีตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 15.87 2. 24.13 3. 34.13
4. 47.61 5. 50

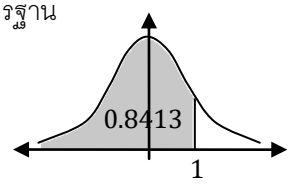
ตอบ 1

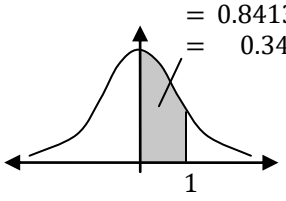
ใช้สูตร $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$ แปลง 70 คะแนน เป็นค่ามาตรฐาน

จะได้ $z = \frac{70 - 60}{10} = 1$

โจทย์ให้ น้อยกว่า 70 คะแนน มี 84.13%

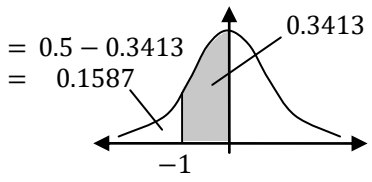
แสดงว่า พื้นที่ทางซ้าย $z = 1$ คือ 0.8413





$= 0.8413 - 0.5$
$= 0.3413$

จะได้ พื้นที่จากแกนกลางถึง $z = 1$ คือ $0.8413 - 0.5 = 0.3413$ ดังรูป



แปลง 50 คะแนนเป็นค่ามาตรฐาน จะได้ $z = \frac{50 - 60}{10} = -1$

จากความสมมาตร จะได้พื้นที่จากแกนกลางถึง $z = -1$ คือ 0.3413 ด้วย

ดังนั้น จะเหลือพื้นที่ทางซ้าย $= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$

ดังนั้น จะมี 15.87% ได้น้อยกว่า 50 คะแนน $\rightarrow$ ตรงกับ $P_{15.87}$

22. ตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 40 คน เป็นดังนี้

ช่วงคะแนน	ความถี่
1 – 5	4
6 – 10	a
11 – 15	6
16 – 20	b
21 – 25	10
26 – 30	4

ถ้าข้อมูลชุดนี้มีมัธยฐานเท่ากับ 17.5 คะแนน แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบจะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16.50 คะแนน
2. 16.75 คะแนน
3. 17.25 คะแนน
4. 17.50 คะแนน
5. 17.75 คะแนน

<u>ตอบ</u> 1

สร้างช่องความถี่สะสมดังรูป

ช่วงคะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม
1 – 5	4	4
6 – 10	a	$4+a$
11 – 15	6	$10+a$
16 – 20	b	$10+a+b$
21 – 25	10	$20+a+b$
26 – 30	4	$24+a+b$

โจทย์ให้จำนวนนักเรียน $= 40$ คน $\rightarrow 24+a+b = 40$

$$a = 16-b \quad ...(*)$$

มัธยฐาน $= 17.5$ อยู่ในช่วง $16-20$ จะได้ $L = 15.5$

$I = 20.5-15.5 = 5$

$f_{Med} = b$

$F_L = 10+a$

จากสูตรมัธยฐาน $\text{Med} = L + \left(\frac{\frac{N}{2}-F_L}{f_{Med}}\right)I$

$$17.5 = 15.5 + \left(\frac{\frac{40}{2}-(10+a)}{b}\right)(5)$$

จาก $(*)$

$$2 = \left(\frac{20-(10+16-b)}{b}\right)(5)$$

$$2b = (20-26+b)(5)$$

$$2b = -30+5b$$

$$30 = 3b$$

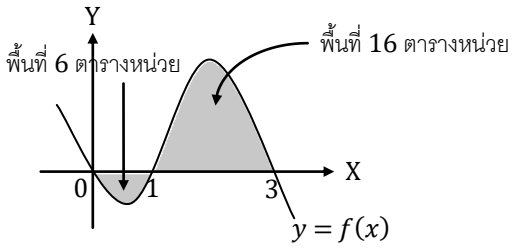
$$10 = b \quad \rightarrow \text{แทนใน } (*): \ a = 16-10 = 6$$

หา $\bar{x} \rightarrow$ ประมาณแต่ละชั้นด้วยจุดกึ่งกลางชั้น

ช่วงคะแนน	ความถี่ (f_i)	จุดกึ่งกลางชั้น (x_i)	f_ix_i
1 – 5	4	3	12
6 – 10	6	8	48
11 – 15	6	13	78
16 – 20	10	18	180
21 – 25	10	23	230
26 – 30	4	28	112
			660

จะได้ $\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{N} = \frac{660}{40} = 16.5$

23. ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีกราฟดังรูป



แล้ว $\int_0^3 \big(|f(x)| - f(x)\big)\,dx$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6
2. 10
3. 12
4. 16
5. 32

ตอบ 3

แบ่งการอินทิเกรตเป็นช่วง เพื่อให้รู้เครื่องหมายบวกลบ แล้วใช้สมบัติ $|a| = \begin{cases} a & , a \geq 0 \\ -a & , a < 0 \end{cases}$ ถอดค่าสัมบูรณ์

$$\int_0^3 \big(|f(x)| - f(x)\big)\,dx = \int_0^1 \big(|f(x)| - f(x)\big)\,dx + \int_1^3 \big(|f(x)| - f(x)\big)\,dx$$

จากกราฟ ช่วง $(0,1) \to f(x)$ เป็นลบ ดังนั้น $|f(x)| = -f(x)$

ช่วง $(1,3) \to f(x)$ เป็นบวก ดังนั้น $|f(x)| = f(x)$

$$= \int_0^1 \big(-f(x) - f(x)\big)\,dx + \int_1^3 \big(f(x) - f(x)\big)\,dx$$

$$= \int_0^1 -2f(x)\,dx + \int_1^3 0\,dx$$

จากกราฟ (พื้นที่ใต้แกน X จะเป็นลบ)

$$= -2\int_0^1 f(x)\,dx + 0$$

$$= -2\,(-6) = 12$$

24. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม และกราฟของ $y = f(x)$ ตัดกับกราฟของ $y = 3x - 4$ ที่ $x = 2$ และ $x = 5$

แล้ว $\int_2^5 \big(2xf(x) + (x^2 - 1)f'(x)\big)\,dx$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 94
2. 104
3. 158
4. 258
5. 264

ตอบ 4

โจทย์ให้กราฟของ $y = f(x)$ ตัดกับกราฟของ $y = 3x - 4$ ที่ $x = 2$ และ $x = 5$

ที่ $x = 2$ จะได้ $y = 3(2) - 4 = 2$

ที่ $x = 5$ จะได้ $y = 3(5) - 4 = 11$

$\Rightarrow$ แสดงว่า $f(2) = 2$ และ $f(5) = 11$ ด้วย ...(*)

พิจารณาค่าที่โจทย์ถาม จะเห็นว่ามี $2x$ และ $x^2 - 1$ $\to$ ถ้าให้ $u = x^2 - 1$ จะได้ $u' = 2x$

ให้ $v = f(x)$ จะได้ $2xf(x) + (x^2 - 1)f'(x) = (u')(v) + (u)(v')$

สูตรดิฟผลคูณ $= (uv)'$

ดังนั้น $\int_2^5 \big(2xf(x) + (x^2 - 1)f'(x)\big)\,dx = uv\,\Big|_2^5$

$= (x^2 - 1)f(x)\,\Big|_2^5$

$= (5^2 - 1)f(5) - (2^2 - 1)f(2)$

จาก (*) $= (24)(11) - (3)(2)$

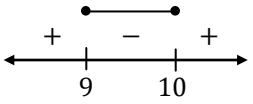
$= 258$

25. กำหนดให้ a_n เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี $a_1 = 2$ และผลต่างร่วมเท่ากับ $-\frac{2}{9}$
ถ้า $b_n = 2^{a_n}$ แล้วจำนวนเต็มบวก m ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_m \geq 1024$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 8 3. 9 4. 10 5. 11

ตอบ 3

$$
\begin{aligned}
b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_m &\geq 1024 && \text{จาก } b_n = 2^{a_n}\\
2^{a_1} \cdot 2^{a_2} \cdot 2^{a_3} \cdot \ldots \cdot 2^{a_m} &\geq 1024 && \text{ฐาน 2 เหมือนกัน คูณกัน } \rightarrow \text{ เอาเลขชี้กำลังมาบวกกัน}\\
2^{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m} &\geq 2^{10} && \text{ตัดฐาน 2 ทั้งสองข้าง (ฐาน} > 1 \rightarrow \text{ ไม่ต้องกลับ มากกว่า} \leftrightarrow \text{น้อยกว่า)}\\
a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m &\geq 10 && \text{จากสูตรอนุกรมเลขคณิต}\\
\frac{m}{2}(2a_1 + (m-1)d) &\geq 10 && \text{โจทย์ให้ } a_1 = 2,\ d = -\tfrac{2}{9}\\
\frac{m}{2}\left(2(2) + (m-1)\left(-\frac{2}{9}\right)\right) &\geq 10\\
2m - \frac{m^2-m}{9} &\geq 10\\
18m - (m^2 - m) &\geq 90\\
0 &\geq m^2 - 19m + 90\\
0 &\geq (m-9)(m-10)
\end{aligned}
$$



จะได้ $m \in [9, 10]$

$\rightarrow$ จำนวนเต็มบวก m น้อยสุด $= 9$

26. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ถ้า $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{211}{9}$
และ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 27$ แล้วจำนวนจริง x ซึ่งทำให้ $\sum_{i=1}^{11} |a_i - x|$ มีค่าน้อยที่สุด เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{64}{81}$ 2. 1 3. $\frac{16}{9}$ 4. $\frac{32}{27}$ 5. $\frac{64}{27}$

ตอบ 4

จากสูตรอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ จะได้ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{a_1}{1-r} = 27$ ...(*)

และจากสูตรอนุกรมเรขาคณิต จะได้

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{a_1(1-r^5)}{1-r} &= \frac{211}{9} && \text{จาก (*)}\\
27(1-r^5) &= \frac{211}{9}\\
1 - r^5 &= \frac{211}{243}\\
\frac{32}{243} &= r^5\\
\frac{2}{3} &= r \quad \rightarrow \text{ แทนใน (*) จะได้ } \frac{a_1}{1-\frac{2}{3}} = 27\\
a_1 &= 27\left(1 - \frac{2}{3}\right) = 9
\end{aligned}
$$

จากสมบัติของค่ากลางในเรื่องสถิติ $\sum_{i=1}^{11} |a_i - x|$ จะมีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $x =$ มัธยฐานของข้อมูล $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$
มีข้อมูล 11 ตัว $\rightarrow$ มัธยฐานอยู่ตัวที่ $\frac{N+1}{2} = \frac{11+1}{2} = 6 \rightarrow$ มัธยฐาน $= a_6$
ซึ่งจากสูตรลำดับเรขาคณิต $a_n = a_1 r^{n-1}$ จะได้ $a_6 = a_1 r^{6-1} = 9\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^3} = \frac{32}{27}$

27. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรีสาม ซึ่งมีค่าวิกฤตที่ $x = 4$ และ $x = -4$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $f''(-4) \cdot f''(4) < 0$

ข. $f\left(4\sqrt{3}\right) = 2f(0)$

ค. $f(-4) + f(4) = 2f(0)$

ง. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ เท่ากับ $f(0)$

จำนวนข้อความที่ถูกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก)
2. 1
3. 2
4. 3
5. 4

<u>ตอบ</u> 4

จาก $f(x)$ มีดีกรี 3 จะได้ $f'(x)$ มีดีกรี 2

ค่าวิกฤตเกิดที่ $x = 4$ และ $x = -4$ ดังนั้น สมการ $f'(x) = 0$ มีคำตอบคือ $4, -4$

จะได้ $f'(x)$ ต้องอยู่ในรูป $a(x+4)(x-4)$

$= ax^2 - 16a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ $a \neq 0$

ดิฟต่อจะได้ $f''(x) = 2ax$ อินทิเกรตจะได้ $f(x) = \frac{ax^3}{3} - 16ax + c$

ก. $f''(-4) \cdot f''(4) = 2a(-4) \cdot 2a(4) = -64a^2 < 0 \rightarrow$ ก. ถูก

(เมื่อ $a \neq 0 \rightarrow a^2$ จะเป็นบวกเสมอ)

ข. $f\left(4\sqrt{3}\right) = \frac{a(4\sqrt{3})^3}{3} - 16a\left(4\sqrt{3}\right) + c$

$= 64\sqrt{3}a - 64\sqrt{3}a + c$

$= c$

$2f(0) = 2\left(\frac{a(0^3)}{3} - 16a(0) + c\right)$

$= 2(\quad\quad c)$

$= 2c$

จะเห็นว่า $c \neq 2c$ ดังนั้น $f\left(4\sqrt{3}\right) \neq 2f(0) \rightarrow$ ข. ผิด

ค. $f(-4) + f(4) = \frac{a(-4)^3}{3} - 16a(-4) + c + \frac{a(4)^3}{3} - 16a(4) + c \rightarrow$ ตัดกันเหลือ $c + c = 2c$ เท่ากับ $2f(0)$ ที่เคยทำในข้อ ข. $\rightarrow$ ค. ถูก

ตัดกันได้ ตัดกันได้

ง. ค่าเฉลี่ย $= \frac{f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2)}{5}$

สังเกตว่า x ทุกตัวที่อยู่ใน $f(x) = \frac{ax^3}{3} - 16ax + c$ ถูกยกกำลังคี่ (x^3, x^1)

ดังนั้น $f(k)$ กับ $f(-k)$ จะตัดกันได้เสมอ (เหมือนกับ $f(-4) + f(4)$ ในข้อ ค.)

$f(-2) + f(2) = \frac{a(-2)^3}{3} - 16a(-2) + c + \frac{a(2)^3}{3} - 16a(2) + c \rightarrow$ ตัดกันเหลือ $c + c = 2c$

$f(-1) + f(1) = \frac{a(-1)^3}{3} - 16a(-1) + c + \frac{a(1)^3}{3} - 16a(1) + c \rightarrow$ ตัดกันเหลือ $c + c = 2c$

และ $f(0) = \frac{a(0^3)}{3} - 16a(0) + c = c$

ดังนั้น $\frac{f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)}{5} = \frac{f(-2)+f(2)+f(-1)+f(1)+f(0)}{5}$

$= \frac{2c + 2c + c}{5} = \frac{5c}{5} = c = f(0) \rightarrow$ ง. ถูก

28. ถ้า S เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก m ที่ทำให้ $\frac{2^{100}}{2^{100}-m}$ เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วผลบวกของสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $99(2^{99})$ 2. $100(2^{99})+1$ 3. $99(2^{100})+1$
4. $100(2^{100})$ 5. $101(2^{101})$

<u>ตอบ</u> 3

$2^{100}-m$ ต้องเป็นตัวประกอบที่เป็นบวก ของ 2^{100}

ตัวประกอบที่เป็นบวกของ 2^{100} จะมี $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{99}, 2^{100}$

ดังนั้น $2^{100}-m = 2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{99}, 2^{100}$

$m = 2^{100}-2^0, 2^{100}-2^1, 2^{100}-2^2, \dots, 2^{100}-2^{99}, 2^{100}-2^{100}$ ใช้ไม่ได้ (m ต้องเป็นบวก)

ดังนั้น ผลบวก $m = (2^{100}-2^0)+(2^{100}-2^1)+(2^{100}-2^2)+\dots+(2^{100}-2^{99})$

$= 100(2^{100})-(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{99})$ $0, 1, \dots, 99$ มี 100 ตัว

$= 100(2^{100})-\left(\frac{2^{99}(2)-2^0}{2-1}\right)$

$= 100(2^{100})-(2^{100}-1)$

$= 100(2^{100})-2^{100}+1$

$= 99(2^{100})+1$

อนุกรมเรขาคณิต $S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1}$

29. กำหนดให้ $A=\{1,2,3,\dots,99,100\}$ และ $B=\left\{k\in A \mid \left(\frac{\cos\frac{5\pi}{8}-i\sin\frac{5\pi}{8}}{\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}}\right)^k = i\right\}$ โดยที่ $i^2=-1$ จำนวนสมาชิกของ B เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5 2. 7 3. 9 4. 11 5. 13

<u>ตอบ</u> 2

จัดรูปให้เป็นเชิงขั้วก่อน

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$

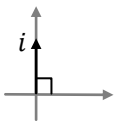
เปลี่ยนให้เครื่องหมายตรงกลางเป็นบวก เปลี่ยนมุมให้ตรงกับมุมของ sin

$\cos\frac{5\pi}{8}-i\sin\frac{5\pi}{8} = \cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\left(-\frac{5\pi}{8}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{8}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{8}\right)$

$\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

ดังนั้น $\frac{\cos\frac{5\pi}{8}-i\sin\frac{5\pi}{8}}{\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}} = \frac{\operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{8}\right)}{\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = \operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{8}-\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{-5\pi+6\pi}{8}\right) = \operatorname{cis}\frac{\pi}{8}$

แทนในสมการเงื่อนไขของ B จะได้ $\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{8}\right)^k = i$



$\operatorname{cis}\frac{k\pi}{8} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$

$\frac{k\pi}{8} = 2n\pi+\frac{\pi}{2}$; เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

$k = 16n+4$

เงื่อนไขของ B คือ $k\in A$ ดังนั้น $1 \le 16n+4 \le 100$

$-\frac{3}{16} \le n \le \frac{96}{16}$

$-\frac{3}{16} \le n \le 6 \rightarrow n = 0,1,2,3,4,5,6 \rightarrow$ มีทั้งหมด 7 จำนวน

30. กำหนดให้ $S=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ $W=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\ \middle|\ a,b,c,d\in S\right\}$

ถ้าสุ่มเมทริกซ์จากเซต W มา 1 เมทริกซ์ แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์ B ซึ่ง $AB=BA$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{17}{625}$ 2. $\frac{19}{625}$ 3. $\frac{21}{625}$ 4. $\frac{23}{625}$ 5. $\frac{25}{625}$

<u>ตอบ</u> 2

ให้ $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ แทนในเงื่อนไข $AB=BA$ จะได้ $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}c & d\\ -a+c & -b+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b & a+b\\ -d & c+d\end{bmatrix}$$

เทียบสมาชิกตำแหน่งต่อตำแหน่ง จะได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} c &= -b && \ldots(1)\\ d &= a+b && \ldots(2)\\ -a+c &= -d && \ldots(3)\\ -b+d &= c+d && \ldots(4)\end{aligned}$$

จะเห็นว่า (3) ซ้ำกับ (1) และ (2) (แทน $c=-b$ จาก (1) ลงใน (3) จะได้ $-a-b=-d$

$a+b=d\ \rightarrow$ ซ้ำกับ (2))

และ (4) ซ้ำกับ (1) (เอา (4) มาตัด d ทั้งสองข้าง จะได้เหมือน (1))

ดังนั้น สนใจแค่ (1) และ (2) ก็พอ เพราะถ้า (1) กับ (2) จริง จะทำให้ (3) และ (4) จริงโดยอัตโนมัติ

และจาก $a,b,c,d\in\{-2,-1,0,1,2\}$ จะได้ $a,b,c.d$ ที่สอดคล้องกับ (1) และ (2) ดังนี้

กรณี $b=-2:$ จาก (1) จะได้ $c=2$ และจาก (2) จะได้ $d=a-2$

$-2=0-2$
$-1=1-2$
$0=2-2$
} 3 แบบ

กรณี $b=-1:\rightarrow c=1$ และ $d=a-1$

$-2=-1-1$
$-1=0-1$
$0=1-1$
$1=2-1$
} 4 แบบ

กรณี $b=0:\rightarrow c=0$ และ $d=a$

$-2=-2$
$-1=-1$
$0=0$
$1=1$
$2=2$
} 5 แบบ

กรณี $b=1:\rightarrow c=-1$ และ $d=a+1$

$-1=-2+1$
$0=-1+1$
$1=0+1$
$2=1+1$
} 4 แบบ

กรณี $b=2:\rightarrow c=-2$ และ $d=a+2$

$0=-2+2$
$1=-1+2$
$2=0+2$
} 3 แบบ

รวมทุกกรณี จะได้จำนวนแบบ $=3+4+5+4+3=19$ แบบ $\rightarrow n(E)=19$

หาจำนวนแบบทั้งหมด $n(S)\rightarrow a,b,c,d$ แต่ละตัวเป็น $-2,-1,0,1,2$ ได้ตัวละ 5 แบบ

ดังนั้น $n(S)=5^4=625\rightarrow$ จะได้ความน่าจะเป็น $=\frac{19}{625}$

เครดิต

ขอบคุณ ข้อสอบ และเฉลยคำตอบ จาก อ.ปิ๋ง GTRmath

ขอบคุณ คุณ Chonlakorn Chiewpanich

และ คุณครูเบิร์ด จาก กวดวิชาคณิตศาสตร์ครูเบิร์ด ย่านบางแค 081-8285490

และ คุณ Potae Kitti

และ คุณ Sornchai Thongkrajang ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร

ขอบคุณ คุณ คณิต มงคลพิทักษ์สุข (นวย) ผู้เขียน Math E-book สำหรับเฉลยข้อ 16

.